ECOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES — ECOLE SUPERIEURE D'ELECTRICITE

ECOLE CENTRALE DE LYON — ECOLE SUPERIEURE D'OPTIQUE

M et P'

Concours d'Admission 1975

(Option P' : voir note en fin de 4me page)

MATHEMATIQUES I - (quatre pages dactylographiées)

I - *Cette première partie est indépendante du reste du problème.*

A tout couple $(\lambda,\mu)\in \mathbb{R}^2$ *on associe l'application*

$$f_{\lambda,\mu} : \mathbb{R} \to R \qquad x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}} (\lambda x + \mu)$$

On désigne par $\Gamma_{\lambda,\mu}$ *la représentation graphique de* $f_{\lambda,\mu}$ *dans un plan euclidien* Π *rapporté à un repère orthonormé* $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°) Montrer que chacune des courbes de la famille $\Gamma_{\lambda,\mu}$ *,* $(\lambda \neq 0)$*, se déduit simplement de l'une des courbes de la famille* $\Gamma_{1,\mu}$*,* $(\mu \geq 0)$

2°) a) Etudier l'application $f_{1,\mu}$ *,* $(\mu \geq 0)$

b) Soit T_m *l'ensemble des points* $M \in \Pi$ *tels qu'il passe par* M *une courbe* $\Gamma_{1,\mu}$ *admettant une tangente en* M *de coefficient angulaire donné* m *. Donner une équation cartésienne de* T_m *. Construire* T_o *et* T_1 *.*

c) Quel est le nombre des points d'inflexion d'une courbe $\Gamma_{1,\mu}$ *? Construire l'ensemble* I *des points d'inflexion des* $\Gamma_{1,\mu}$ *.*

d) Construire les courbes $\Gamma_{1,0}$ *et* $\Gamma_{1,1}$ *.*

N.B. Toutes les courbes seront tracées sur une même figure.

II - *Cette deuxième partie concerne des suites de polynômes à une indéterminée* X *sur le corps* $\mathbb{R}$ *. On note* (Q) *la suite* $n \mapsto Q_n(X)$ *de termes successifs* Q_o *,* $Q_1 \ldots$*,* $Q_n \ldots$*, On dira que* (Q) *est une A-suite si pour tout* $k \geq 1$ *les termes consécutifs* Q_{k-1} *,* Q_k *,* Q_{k+1} *vérifient l'égalité :*

$$(A) \qquad \boxed{Q_{k+1} = X\,Q_k + k\,Q_{k-1}}$$

1°) Notant Q' *le polynôme dérivé de* Q*, montrer que chaque A-suite vérifie aussi, pour tout* $k \geq 2$ *:*

$$\left[Q'_{k+1} - (k+1)\,Q_k\right] = X\left[Q'_k - k\,Q_{k-1}\right] + k\left[Q'_{k-1} - (k-1)\,Q_{k-2}\right] .$$

En déduire qu'à toute A-suite (Q) *est associée une A-suite unique* (R) *vérifiant :*

$$\forall\, k \geq 1, \quad R_k = Q'_k - k\,Q_{k-1} .$$

Exemple : on donne $Q_o = X + 1$*,*

$Q_1 = X - 1$ *. Trouver* R_2 *,* R_1 *,* R_o

2°) On rappelle qu'un polynôme est dit unitaire si le coefficient du terme de plus haut degré est 1 . Démontrer l'existence d'une suite unique (P) de polynômes unitaires P_o , P_1 ,..... P_n.. vérifiant à la fois pour tout $k \geq 1$:

$$\begin{cases} (B_1) & P_{k+1} = X P_k + P'_k \\ (B_2) & P'_k = k P_{k-1} \end{cases}$$

Trouver P_o , P_1 , P_2 , P_3 .

3°) (Cette question est indépendante de tout le reste du problème)
On considère la suite numérique (x_k) définie par :

$$x_k = \frac{P_{k+1}(1)}{P_k(1)}$$

Former une relation liant x_k et $\frac{k}{x_{k-1}}$

Démontrer par récurrence l'encadrement :

$$\forall k \geq 0 , \quad \frac{1}{2} + \sqrt{k + \frac{1}{4}} \leq x_k \leq \frac{1}{2} + \sqrt{k + \frac{5}{4}}$$

En déduire que la suite (x_k) est croissante, ainsi que la suite $\left(\frac{P_k(1)}{\sqrt{k!}} \right)$

III - $\mathcal{E}$ désigne le $\mathbb{R}$ espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ indéfiniment dérivables ; les dérivées d'un élément f de $\mathcal{E}$ sont notées f', f",.... $f^{(k)}$ ...
Si σ est un endomorphisme de $\mathcal{E}$, ses composés par lui-même sont notés.
$\sigma \circ \sigma = \sigma^2$, $\sigma^{k-1} \circ \sigma = \sigma^k$,... ; σ° désigne éventuellement (pour tout σ) l'application identique de $\mathcal{E}$.
Soit φ l'endomorphisme de $\mathcal{E}$ qui à f associe $\varphi(f) = f' + xf$.

1) a) Déterminer $\varphi^2(f)$. Expliciter $\varphi(f)$ et $\varphi^2(f)$ pour la fonction $f_{\lambda,\mu}$ définie dans I .

b) Déterminer les noyaux $\ker \varphi$, $\ker \varphi^2$,..., $\ker \varphi^n$ des endomorphismes φ, φ^2,..., φ^n de $\mathcal{E}$. (On conseille de définir les fonctions f cherchées par $x \longmapsto f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} g(x)$.)

c) Intégrer l'équation différentielle :

$$y'' + 2xy' + (x^2+1)y = e^{-\frac{x^2}{2}}(x+1).$$

2) *On reprend ici les polynômes P_k obtenus dans II 2°, et par abus de notation on conserve la même lettre pour désigner la fonction polynôme $x \longmapsto P_k(x)$*

Etudier l'image $\mathcal{C}(P_k)$. Que peut-on dire de l'espace vectoriel de fonctions engendré par P_0 , P_1 ,... , P_n ? A quelle condition nécessaire et suffisante sur le polynôme ϖ existe-t-il une solution polynôme de l'équation $\mathcal{C}(y) = \varpi$?

Exemple : $\varpi(x) = x(x+\lambda)^2 + 4$, λ *donné. Discuter.*

3) a) *A tout réel α on associe l'élément F_α de $\mathcal{C}^\infty$ défini par :*

$x \longmapsto F_\alpha(x) = e^{\alpha x + \frac{\alpha^2}{2}}$.

Démontrer pour tout α et tout k la relation :

$(\forall x \in R) \quad (\mathcal{C}^k(F_\alpha))(x) = P_k(x+\alpha).F_\alpha(x)$

où P_k a même signification qu'au 2 : quel lien y a-t-il entre P_k et la dérivé $k^{ème}$ de $x \longrightarrow e^{\frac{x^2}{2}}$?

b) *Soit $\{A_{k_0}, A_{k_1}, \ldots, A_{kk}\}$ l'ensemble des coefficients (éléments de $\mathcal{C}$) qui permettent d'exprimer pour tout élément f de $\mathcal{C}^\infty$, l'image $\mathcal{C}^k(f)$ par la combinaison :*

$\mathcal{C}^k(f) = A_{k_0} f^{(k)} + .. + A_{kj} f^{(k-j)} + .. + A_{kk} f$

Appliquant cette relation à F_α , exprimer A_{kj} en fonction seulement de k , de j et de $P_j(x)$.

c) *Etudier la convergence, pour α et x fixés, de la série $\sum_0^\infty \frac{\alpha^n}{n!} P_n(x)$ et trouver sa somme. (Dériver d'abord en α).*

IV - *On se restreint désormais au R espace vectoriel $\mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}^\infty$, formé des fonctions réelles séries entières de la variable réelle x , convergentes sur R. Les endomorphismes de $\mathcal{C}$ qui seront considérés laissent $\mathcal{C}_0$ stable, et on prendra sans notation nouvelle leur restriction à $\mathcal{C}_0$.*

1°) *Soit* $f = \sum_0^\infty a_n x^n$ *élément de* $\mathcal{C}_0$

On pose : $\mathcal{C}(f) = \sum_0^\infty a'_n x^n$

$\mathcal{C}^2(f) = \sum_0^\infty a''_n x^n$, *où* $\mathcal{C}$ *à la même signification qu'au III.*

Exprimer les a'_i , et éventuellement les a''_i , en fonction des a_i . Retrouver ker $\mathcal{C}$ et ker $\mathcal{C}^2$.

2°) *On définit $g_k \in \mathcal{C}_0$ par :*

$$g_k(x) = \frac{x^k}{k} - \frac{x^{k+2}}{k.(k+2)} + \ldots + (-1)^i \frac{x^{k+2i}}{k(k+2)..(k+2i)} + ..$$

a) calculer $\mathcal{C}(g_k)$. Résoudre dans $\mathcal{C}_o$: $\mathcal{C}(y) = 1$.

b) étudier la convergence de la série :

$$g_1(x) + \frac{2g_2(x)}{1!} + \frac{3g_3(x)}{2!} + \ldots + \frac{ng_n(x)}{(n-1)!} + \ldots$$

et trouver sa somme .

V - On considère maintenant l'ensemble $\mathcal{S}$ des séries entières de x et une application Φ de $\mathcal{C}_o$ dans $\mathcal{S}$ définie de la façon suivante : à la série $f = \sum_o^\infty a_i\ x^i$ correspond la série $\phi(f) = \sum_o^\infty b_i\ x^i$ avec $b_i = \sum_{E_i} \lambda_{ij}\ a_j$; E_i est une partie finie de $\mathbb{N}$, qui dépend de i, λ_{ij} sont des réels donnés avec $j \in E_i$.

1°) Dans cette première question on suppose $E_i = \{i\}$ et $\lambda_{ii} = i\ !$. L'application Φ correspondante est-elle un endomorphisme de $\mathcal{C}_o$?

2°) On fixe $E_o = \{0, 1, \ldots, p\}$; on cherche les E_i et les coefficients λ_{ij} pour que, sur toute série entière f, l'application Φ et la dérivation, notée D, commutent $\Phi\left[D(f)\right] = D\left[\Phi(f)\right]$.

Définir E_i pour chaque i et montrer que Φ est déterminée par le choix des λ_{oj} $(o \leq j \leq p)$ et obtenue par la combinaison $\sum_o^p \lambda_{oj} \cdot \Phi_j$ de transformations particulières Φ_j dont on précisera la nature. Φ_j définit-il un endomorphisme de $\mathcal{C}_o$?

Soit $\theta \in \mathbb{R}$, et (H) l'application Φ précédente pour laquelle $\lambda_{oo} = 1$, $\lambda_{o1} = \theta, \ldots\ \lambda_{oj} = \theta^j$, exprimer (H)$(f)$ sans utiliser les dérivées de f lorsque f est un polynôme de degré au plus égal à p.

3°) $\mathcal{C}$ est défini comme dans les parties antérieures.

Montrer que, dans l'anneau des endomorphismes de $\mathcal{C}$, $(D \circ \varphi - \varphi \circ D)$, et plus généralement $(D \circ \varphi^k - \varphi^k \circ D)$ s'expriment au moyen des composés de φ par lui-même.

Chercher des solutions de l'équation $D \circ \Phi - \Phi \circ D = Id_{\mathcal{C}}$ dans laquelle l'inconnue est l'endomorphisme Φ de $\mathcal{C}$.

==========

Note: La première épreuve de MATHEMATIQUES en P' est la même que celle-ci à quelques suppressions près: II 3°; III 3° c) et IV 2° b), soulignées dans la marge gauche de l'énoncé.

F I N

°°°°°

°°°

°

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail